

# 量子力学-入門編

小出 真嵩

2017年5月7日

## Abstract

本 PDF は、天文研究会の人に量子力学を布教することを目的に作成したものである。個人的にはブルーバックス文庫や科学雑誌 Newton のように物理や数学の勉強をしたことがない人でも読めるようということを心がけて書いたつもりなので読んでもらえるともうれしい。このため内容は紹介程度のものとなっているが需要とやる気があれば厳密な理論構築をする PDF も作るつもりである。

さて Newton の運動方程式を原理とする古典物理学は 20 世紀初頭までは、この世の中を説明できる絶対的な真理と考えられていたが、その後の多くの実験や理論の研究からその考えが誤っていることが明らかとなった。そのようにして古典力学が崩壊した後に登場したマイクロなスケールでの新しい物理が今回の主役の量子力学である。量子力学は、全ての物体は粒子としての性質と波としての性質の両方を併せ持つということを基本原理とする物理である。この考えは Newton 力学の原理と比べると直感的ではなく信じられないかもしれないが、現代の観測でもいまだに根本的矛盾を見つけることのできていない。それどころか反対にこの考えを認めた上で理論的に予想された現象が現実で発見されるといったことも非常に多い。このように量子力学は現実世界を記述する上では非常に正確で優れた理論体系なのだが、基本原理が直感的ではないことから分かる通り、非常に難しい理論である。よって繰り返しになるがこの PDF は基礎事項の紹介程度にとどめ、厳密な理論は専門書などにまかせることとする。

## 目次

1	ドブロイ仮説	2
2	シュレディンガー方程式とボルンの確率解釈	3
3	状態の重ね合わせ	4
4	不確定性原理	6

# 1 ドブロイ仮説

まず光とは何か？ということを考えよう。科学に興味のある人は光とは電磁波だということを知っていると思う。つまり、われわれが見ている光というものは電磁波という電場と磁場からなる波のうちで目に見える振動数を持っているもの（可視光）だ、ということである。赤外線や紫外線という言葉を知らない人はいないと思うが、それらも我々が目で認識できない振動数をもった電磁波の一種であり、その意味では赤外線や紫外線は光であるということが出来る。このように考えると光とは波である、と決めつけたくなるかもしれないがそれは早計である。

光の波動説に待ったをかけた実験の一つに光電効果というものがある。光電効果とは金属のような物質に対して紫外線や X 線のような振動数の高い光を照射すると金属の表面から電子が飛び出してくるという現象である。この電子が出てくること自体に関しては波動説に影響はない。波（光）が金属にぶつかった時の衝撃で電子が金属から飛び出してしまった、と考えればいいからだ。問題は次の実験事実である。

- 飛び出す電子のエネルギーは、照射した光の振動数にしか依存しない。

この結果は波動説と対立する。なぜならば仮に光を波だとすると、光を照射するライトを 1 台から 2 台に増やせば、電磁波の重ね合わせにより、金属表面上の電子が波から受け取るエネルギーの量は 2 つの波のエネルギーの足し合わせでももとの 2 倍になり、飛び出す電子のエネルギーも大きくなると考えられるはずなのに、ライトを 2 台に増やしても振動数を変えない限りは電子のエネルギーは変化しないと実験事実は言っているからである。この問題点を解決するために考えられた新説がアインシュタインが提唱しノーベル賞を受賞した光の粒子説である。アインシュタインは光を次のように考えた。

- 振動数  $\nu$  の光とは  $h\nu$  のエネルギーをもつ粒子（光子）の集まりである。

（ここでの  $h$  はプランク定数というただの数である）この説を採用すると光電効果は金属表面上の一点にある電子が光の粒子 1 つとぶつかって飛び出ると考えられるので、ライトを 2 個に増やしても金属表面全体にぶつかる光子の総数が増えるだけで飛び出る電子のエネルギーの大きさは変化しないと説明できる。さらに光電効果のもう一つの実験事実として、ライトの数を増やすと飛び出す電子の総数が増えるというものがある。これも粒子説を採用すれば、金属表面にぶつかる光子が増えたからと説明ができるわけである。（ここで二つ補足をするが、少しややこしい以下の文章を読む上で必要ない知識である。まず一つ目に電磁波のもつエネルギー密度は電磁波の振幅に依存し、振動数には依存しない。振動数に依存するのは光子の持つエネルギーである。この違いをよく知りたい人は「EMAN の物理学」というサイトの『波のエネルギー』というページを参考にするといい。二つ目、光子説を採用したときに、二つの粒子がほぼ同時に当たればエネルギーの大きい電子が飛び出すと考えるかもしれない。（ある程度おまけをすれば）間違っていないがこれはそんなに単純な話ではなく、物性物理学の分野のバンド構造について知る必要がある）

以上の考察より、光とは粒子であると決めつけることが出来そうだが、そうときめつけてしまうと今度は電磁波としての波の性質（屈折や回折）を説明できなくなる。ここで 1900 年代の物理

学者はどのように考えたかという、そもそも光というものは粒子であり同時に波でもある。と考えたのである。この考えは直感的にはとても信じられない。なぜならば、私たちの日常生活ではそのような現象が存在しないからだ。しかし、そう考えなければ現象は説明できないのだ。そもそも私たちの直感が正しいものだ、と信じるということ自体が間違いである。数学でも人間がその頭で認識できるのは整数までである。話が脱線したので元の話に戻そう。このように光の粒子-波動の二重性を認めると、次に物理学者はこの考えを他の粒子にも適用しようとした。それが章タイトルにもなっているドブロイ仮説である。つまり、我々の体を構成する電子や水素原子などもすべて波であり、粒子だ、というのである。これも信じられない話だがそれも人間の直感が間違っているのが原因である。

さて、ここまでの話で読者は粒子と波動の二重性にある程度なれてきたと思う。しかし混乱させてしまって大変申し訳ないのだが実は、「物質は粒子であり、波でもある」というのは量子力学の基本原則として完璧ではないのだ。もちろん全くの間違いというわけではないのだが、厳密にいうと少し違う。次の章ではそのことについて話そうと思う。

## 2 シュレディンガー方程式とボルの確率解釈

話を分かりやすくするために、先に「物質は粒子であり波である」のどこが間違っているかを説明する。実際の観測において電子がどのように観測されるかという電子は空間の一点に粒子として観測され、波のような広がりを持ったものが観測されるわけではない。では次にその粒子はどこで観測されるか？ということを見ると、今度は電子が波のような運動をしていなければ説明がつかないのである。つまり、このことをまとめ基本原則を正しく言い換えると「物質はあくまで粒子であるが、その振る舞いや運動の仕方は波の様である」ということになる。

粒子はやっぱり粒子で波ではなかったのか、と安心するかもしれないが粒子の振る舞いが波であるというのはやはり直感的ではないだろう。具体的にどんなことが起こり得るかという、友達に向けて絶対にきっちりとまっすぐにボールを投げたのに、ボールは友達のところに届くはずの時間には別のところにあるのである。カーブを投げたとかそういうわけではない。では、ボールの位置を予測するにはどうすればいいのか？と考えたときに登場するのが、有名な波動関数  $\psi$  と次のシュレディンガー方程式である。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

数式が出てくると一気に難しく感じるかもしれないが安心してほしい。このシュレディンガー方程式も見た目が複雑ではあるが、高校まで扱ってきたただの方程式には違いないのだ。つまり考えていることの本質は  $0 = x^2 - y$  と何ら変わらない。  $0 = x^2 - y$  を  $x$  について解くと  $x = \sqrt{y}$  という解を得るように、我々はシュレディンガー方程式を  $\psi$  について解くことで波動関数  $\psi$  の形を知るのである。そしてその  $\psi$  はなんと波を表す関数の形をしているのである！ではこの  $\psi$  自体が粒子の位置を意味するのか？というそれは違う。もう一度シュレディンガー方程式をよく見てほしい。式の一番最初に虚数単位の  $i$  がかかっている。これによって波動関数  $\psi$  は実数と虚数が混ざった複素数になってしまうのである。もちろん現実世界の場所は実数で表せられるので波動関数

$\psi$  自体は粒子の位置を教えてくれる関数ではないのだ。(それに実は、波動関数  $\psi$  は座標と時間の関数なのだ。つまり、空間の一点の座標と時間を代入することで初めて数字を出してくれるのである)。ではこの波動関数  $\psi$  とは一体何なんだ、と思うだろう。このよくわからない波動関数  $\psi$  に意味を与える原理が次のボルの確率解釈なのである。

## ボルの確率解釈

波動関数  $\psi$  の絶対値の二乗  $|\psi|^2$  は与えられた座標に粒子が存在する確率を与える

(絶対値をとることで複素数は正の実数になるので、波動関数が複素数になることの問題は解決している) このボルの確率解釈は非常に面白い量子力学的性格を表している。それは、「粒子の存在する位置は確率的にしか決定できない」ということだ。理解するために具体的な話をしよう。今私が一枚の壁に向かってペイントボールを複数回投げ実験を行うとする(なおこの実験での私は、ペイントボールを寸分の狂いなく何度でも同じ方向に同じ速さで投げられるものとする) もしもこれが古典的(つまり日常生活での実験)ならばペイントボールは全部同じところに飛んでいき、壁は一点にだけ色がつくだろう(同じ方向に同じ速度で投げるのだから当たり前である)。では、もしもこのときの私とペイントボールが原子のようにミクロな大きさだったらどうなるだろうか?なんとこのときは壁のいろいろな場所に色がつく!同じ方向に、同じ速度で投げたにも関わらず、ペイントボールの行先は違うのである。話はこれで終わらない。ここで気になるのは粒子の軌道である。なぜペイントボールの終着点が異なるのか?と気になった物理学者は投げたペイントボールがどのような軌道を描いて壁にぶつかるのかを確認するための装置を用意して再度、複数回ペイントボールを投げた。すると実験結果は驚くべきものとなった。なんと観測装置をおいて実験すると今度はミクロの世界でも壁の一点のみに色がついたのである。観測装置を置いただけ、つまり粒子を見ただけで量子力学の世界の実験結果は変化するのである。なぜこのようなことが起こるのか?ということの根本的な説明は現代物理学をもってしてもわかっていない。このことはコペンハーゲン解釈として量子力学を構成するために認めざるを得ない一つの原理となっている。次の説ではこのことについて説明する。

## 3 状態の重ね合わせ

早速、上のペイントボールのようなことがなぜ起こるのか?ということの解釈を説明したいと思うが、これはあくまで現代物理の解釈であり、なぜそんな現象が起こるのか、ということは上で述べた通りわかっていない。

量子力学では、観測される前の物体の位置が分かっていない状態を「状態の重ね合わせ」という。すなわち物体は観測されるまでは同時に複数の位置に(確率的)に存在しているということである。この考えは飴がどちらの箱の中に入っているか当てるゲームを考えるとわかりやすい。しかし、注意しないと誤解してしまうので安易に考えないように。

問. 右の箱か左の箱のどちらかに飴玉が入っています。どっちに入っているでしょう?

このとき、当てる側の人間は飴玉がどちらに入っているかわからない。なので右の箱に入っている確率は 50%、左の箱に入っている確率も 50%と考える。そして自分が入っていると思った方の箱を開けると中に飴があったり、なかったりするわけである。このように箱を開けた後では問題を出

された側の人間もどちらの箱の中に 100 % 飴があり、どちらの箱には飴が 0 % の確率で入っている（つまり入っていない）ということがわかるわけである。勘違いしてほしくないことは、まだこの話は量子力学とは全然関係ないということだ。上の話は、あくまで問題を出された側の人間が箱を開けてみるまではどちらに飴が入っているかわからないだけで、問題を出した側の人間はどちらに飴が入っているかを知っている。つまり箱を開ける前から飴がどちらに入っているか、ということはあるのだ（余談、まれに Schrodinger の猫の実験のパクリで、パンツの柄はスカートをめくって観測するまではどんな柄か決まっていなとかいう思考実験の話を目にするが、そんなわけはない。履いた本人は柄を知っている）。量子力学が絡んでくるのはここからである。いまこの飴を粒子に変えて話を進めてみよう。

問. 右の箱か左の箱のどちらかに粒子が入っています。どっちに入っているのでしょうか？

仮定として、今回はどちらかの箱に誰かが入れたものではないものとする。このような状態を作りたければ、一つの箱の中に粒子を入れたあと人体切断マジックの要領で箱をバサッと二等分すればよい（この操作を飴の時にも行えば出題者もわからないままで出題できるのでは？と思うかもしれないが、そもそもどちらか一方にだけ 100 % 飴が入っているのは日常生活の経験上明らかだろう）。では粒子の時にこのように箱を用意したとする。このときも問題を出された側の人は、右の箱に粒子が入っている確率は 50 %、左の箱に粒子が入っている確率も 50 % と考えるであろう。そして箱を開けるとどちらの箱に 100 % 入っているかわかる。ここまでは飴のときと変わらない。粒子の場合の特別な点は、この箱のふたを開けてみるまでは、本当にどちらの箱に粒子が入っているかは確定しておらず、右に入っている状態と左に入っている状態が混在しているのだ。観測するまでは本当に粒子の存在が確定しておらず、考えられる複数の状態が同時に混在している状態を、状態の重ね合わせという。ペイントボールを投げる実験で観測の有無により結果が変わるのは、このようにペイントボールは観測された時点で空間の一点に存在する確率が 100 % になるからといえるのだ。確率が観測によって変動し 100 % になるこの現象のことをコペンハーゲン解釈という。

## コペンハーゲン解釈

粒子の重ね合わせの状態にあるとき、観測を行うことで状態は一つに確定する。

さてこの説の最後に一つ加筆修正しないといけないことがあるが少しややこしい上に未解決問題を含むので無視してもらっても構わない。それは「飴が入っている方の箱は経験的にどちらか一方に確定しているのは明らかだろう」といった点についてだ。これは本当に明らかか？と言われると少し困ってしまう。もしも飴をどちらかに振り分ける装置として量子力学の重ね合わせの状態を絡めたものを使うと本当に経験上明らかというしかなくなる。問題はミクロな現象の結果としてマクロ（大きいスケール）なものを持ってきている点にあり、このような時には一体どの段階の何を「観測」と呼べばいいのかわからなくなるのである。またそもそもミクロなスケールでの観測も完全に定義できているとはいえない。一連の問題を観測問題といい実は次節の不確定性原理にも関係する。しかし、これらの話は解決すればノーベル賞レベルの話なので、以降の章では極力触れないようにして、関係する部分は都合の良い解釈をすることにする（この辺は自分もよくわかっていないので、興味のある人は量子デコヒーレンスや量子情報理論を勉強して教えてください）

## 4 不確定性原理

### 不確定性原理

粒子の座標と粒子の運動量を同時に正確に測定することはできない。

不確定性原理は上のような定理なのだが、(ちなみに原理と書いているが量子力学の7つの公理から導くことが出来る) この定理はよく誤った理解をされる。まずはその間違っただけの考えを紹介しよう。

ここでまず考えるのは観測という行為についてである。前節の最後に観測は定義できていないと言ったじゃないか!と云われそうだが、それは何をもって観測というかの定義の問題であり、物理量(温度、座標など物理的な意味を持つ値)を測定することとは違う。物理量を何らかの方法(つまり「観測」)によって測定することはできるのだ。さて、では改めてここでは観測を、「物理量を測定する操作」と定義してしまおう。この観測の定義は別に量子力学に限定されたものではなく、古典力学や熱力学でも同様である。具体例としてはコップに入った水の温度を測定するために温度計をコップに入れる操作は観測にあたるし、電圧を測るために電圧計を回路に接続する操作も観測である。コップに温度計を突っ込む実験についてもう少し深く考えることとしよう。コップに温度計を入れると中に入っている水はその衝撃によって動かされてしまうということは想像しやすいと思うが、果たしてこのときの水の状態はコップの中に温度計を入れる前の水の状態と同じといえるだろうか?この答えは明らかにNOだろう。少しとはいえ水を動かしてしまうとそれにより温度上昇が発生したりするからだ。この具体例のように全ての観測という操作は、物理的な状態に影響を与える。この影響のことを観測者効果という。不確定性原理の間違っただけの理解はこの観測者効果を用いて説明される。その説明は次のとおりである。

粒子の位置をより正確に測定するためには、分解能がより小さい、波長の短い光(光子)を用いて粒子を見る必要があるが、波長が短い光は振動数が大きくなり大きなエネルギーを持ってしまふ。そのために、測定を行う対象の粒子を弾き飛ばしてしまうので運動量を正確に測定できない。反対に、運動量を正確に測定しようとすると、今度はその分振動数を小さくする必要があるので、分解能が大きくなり位置が正確にはわからなくなる。

このような不確定性は本当に存在するのだが、これは不確定性原理とは全く別の不確定性である。上の話によると、まるで粒子は決まった座標と運動量を持ってはいるが、測定精度の限界により正確にその値を測定することが出来ないという印象を受ける。しかし不確定性原理が主張しているのはそうではなく「粒子の位置と運動量は本当に値が揺らいでいて決まった値を持っていない」ということである。実際、不確定性原理の証明には測定は関与していない。不確定性原理は観測とは独立した量子力学の現象である。

## 参考文献

- [1] 猪木慶治 川合光 “量子力学 I (II) ”  
入門書とは言えないがわかりやすい。内容が素粒子物理学に応用することを意識したものになっているように感じる。
- [2] ファインマン, レイトン, サンズ ‘ファインマン物理学,’  
量子力学を本格的に勉強しようとする人向けの入門書。あまり物理や数学を知らない人でも読むことはできるがそれなりにページが多いので、最後まで読むのはつらそう。この本に限らず、ファインマンの本は物理的なイメージの説明が丁寧なのでおススメである。
- [3] 朝永振一郎 ‘量子力学 I (II) ’  
量子力学がどのようにつくられてきたのか？ということを知ることが出来る名著。量子力学の根本的な部分に疑問を持った時に読んでみると、新しい知見が得られる。
- [4] P.A.M.DIRAC ‘THE PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS’  
教授から学者になりたいならこれを読まないといけない。という感じで勧められた本。他の本と異なり、最初っからブラケット記法を用いて理論を構築していく。まだ読んでる途中なので良さはあんまりわからない。
- [5] David J.Griffiths ‘Introduction to Quantum Mechanics’  
昨年度の量子力学の授業の指定教科書。DIRAC の量子力学と同じく世界的に有名な一冊である。こちらの方はどの国でも大学で扱う標準的な難易度の専門書として認識されている。具体例や問題が豊富で、さらに英語ではあるが internet にその解答が全て載っているので入門書としてもちょうどいい。
- [6] 川村嘉春 “相対論的量子力学”  
量子力学に特殊相対性理論を組み込んだものが相対論的量子力学である。Dirac 方程式の美しさを手軽に知れるいい本である。