

# ブラックホール入門

神戸大学天文研究会

2012/07/01

このレジュメは元々、神戸大学天文研究会の宇宙科学班「第一回勉強会」のために作成されたもので、若干の訂正を加え今回の交流会で再び使用することになりました。当日お配りしたレジュメもこれを元に作成しました。文章と4章の数式を読めばだいたいの内容が追えるかと思えます。肩の力を抜いてお読みください。

神戸大学天文研究会 2012 年度宇宙科学班班長

## 目次

<b>1</b>	<b>歴史と概要</b>	<b>2</b>
1.1	経緯	2
1.2	重力崩壊と Chandrasekhar 質量	2
<b>2</b>	<b>特殊相対性理論</b>	<b>3</b>
2.1	光の速度とエーテル説	3
2.2	絶対時間は存在しない	3
2.3	特殊相対性理論から導かれる重要な事実	4
<b>3</b>	<b>一般相対性理論</b>	<b>5</b>
3.1	時空間の基準となる線素	5
3.2	曲がった空間とは	6
3.3	Einstein 方程式	7
<b>4</b>	<b>Schwarzschild 解とその解釈</b>	<b>8</b>
4.1	条件を絞って Einstein 方程式を解く	8
4.2	解が持つ意味	9
4.3	Newton 力学との一致	11
<b>5</b>	<b>観測</b>	<b>12</b>
5.1	降着円盤と宇宙ジェット	12
5.2	観測によって発見されたブラックホール	12
<b>6</b>	<b>補足</b>	<b>14</b>
6.1	注釈 15 における計算の大まかな流れ	14

# 1 歴史と概要

## 1.1 経緯

1901年, Einstein はスイスのベルンにある特許局にやっとの思いで職を見つけ, 仕事の傍ら研究を行い 1905年に3つの論文を発表した. そのうちのひとつが特殊相対性理論であり, 彼は世界から一躍注目を浴びた<sup>\*1</sup>.

それから約10年後の1916年, 今度は特殊相対性理論をより発展させた一般相対性理論という論文を発表した. そしてその論文の中で導かれる Einstein 方程式を初めて解いたのが Schwarzschild であった. 論文発表からわずか2か月後のことであった. この解は Schwarzschild 解と呼ばれブラックホールの存在を示唆している.

そもそもブラックホールという言葉がはじめて使われたのは, 理論的研究と観測によってその存在が確かなものとなりつつあった1969年のことである. それまでは「凍りついた星」や「崩壊星」などと呼ばれていた. では「崩壊」とは一体何を意味するのだろうか.

## 1.2 重力崩壊と Chandrasekhar 質量

星と重力の結びつきは, 星を構成している物質が重力で束縛されていることから生ずる. たとえば地球の場合, 構成している物質が互いに引き合っているにもかかわらず収縮してしまわないのは, 固体の硬さが重力と平衡を保っているからである. これに対して恒星は, 天体内部の核融合反応によって生じる内側からの圧力が重力と平衡を保っている. だから恒星が核融合反応の燃料を使い果たすと内側からの圧力がなくなり, 自分自身の重力で勝手に収縮し始めるのである. そうして収縮しきった星を白色矮星と言う.

恒星が燃え尽きた後にできる白色矮星では, その質量がある値以上であると天体中心部の核にある物質を構成する原子はあまりの圧力のためにその形を維持できなくなる. その限界質量を **Chandrasekhar 質量** という. Chandrasekhar 質量を超えると天体の核に存在する原子は放射性崩壊を起こし, 電子軌道にある電子が原子核中の陽子に取り込まれ, 中性子とニュートリノが放出される. 天体の核部分が中性子物質化することにより, 中心部はさらに圧縮される. このとき天体の核周辺に存在する物質はほとんどブレーキがかからずに中心に向かって落下していく. これを**重力崩壊**という<sup>\*2</sup>.

天体中心部が収縮しコアの高密度化が進むにつれて, 核部分は自由落下により運動エネルギーを得る. そのエネルギーの一部は衝撃波となって外へ伝播し, あとから続いて落下してくる外側の層はこの衝撃波と真正面から激突して大爆発を引き起こす. これを**超新星爆発**といい, このとき天体の外層は吹き飛ばされる<sup>\*3</sup>.

最終的に天体中心部に残された高密度の核を中性子星と呼び, これは1立方cmあたり1億トンという想像を超える高密度な物質からなる. なお, 重力崩壊が始まり超新星爆発が起きるまで, この間わずか1秒程度である [1]. また中性子星にも質量の限界があり, これを臨界質量と言う. 臨界質量を超えた中性子星は重力崩壊を起こし, 今度は際限なく無限に収縮する. こうしてブラックホールが出来る. つまりブラックホールとは, 重い恒

<sup>\*1</sup> ちなみに彼が論文発表前に討論した相手は特許局の同僚の Besso だけであった.

<sup>\*2</sup> 重い恒星の場合, 核融合によって中心核には原子核の結合エネルギーが最大である鉄が残る. そして次に鉄が熱エネルギーを吸収して, ある限界に達すると光分解を起こしてヘリウムと中性子に分解する. その後中心部は自由落下 (に近い落下) を始め, 超新星爆発を起こす. 最後には爆縮されてできた中性子の核が残る.

<sup>\*3</sup> 実際はニュートリノがエネルギーの流れとなって外側の層に流れる. このときただすり抜けるのではなく, 外層の物質と相互作用することによって外層の落下を和らげ, 衝撃波と共に吹き飛ばす.

星の死によって生まれる超高密度な天体である\*4.

## 2 特殊相対性理論

### 2.1 光の速度とエーテル説

1675年、デンマークの天文学者 Rømer は世界で初めて光の速度をオーダーまで正確に測定した。彼は木星の第一衛星イオの木星による食と地球の公転に着目し、当時としては驚異的な精度で光の速度を測定することに成功したのであった\*5.

当時、様々な実験的事実に基づき光は波であると考えられていた。また音が空気という媒質の中を波として伝わるように、光も同様にエーテルという媒質の中を伝わる波であると認識されていた。風が吹くと音の速さが変わるように、エーテルが空間を流れているならば方向によって光の速さは変化するはずであると考えられていたのである。

しかし 1887年、Michelson-Morley の実験によって光の速さは光源の運動にも進行方向にも依存しないことが確認された。以後色々な方法でこの事実が正しいことが確認され、結局「エーテルは存在せず、光速度は進行方向に依らず一定」であることが分かった。これを**光速度不変の原理**という。

### 2.2 絶対時間は存在しない

1905年、Einstein は特殊相対性理論を発表した。この論文は先程の光速度不変の原理に基づいて展開され、時間は絶対的なものでなく相対的なものであるということが示されている。すなわち、静止している人と等速直線運動している人とでは、どちらを基準にするかによって時間の進み方が異なるというのである。

下の図のように、A と B の 2 人の観測者と 2 つの光時計を考える。光時計とは、光の伝達によって時間を測る仮想的な時計である。下底から発射されたレーザー光が上底に到達するまでの時間を一刻みとする。B は A に対して一定方向に速さ  $v$  で等速直線運動しているとする。以後、光速を  $c$ 、光時計の高さを  $L$  とする。図において黒太線は A が観察する光の軌跡である。

□ A と共に静止している光時計について

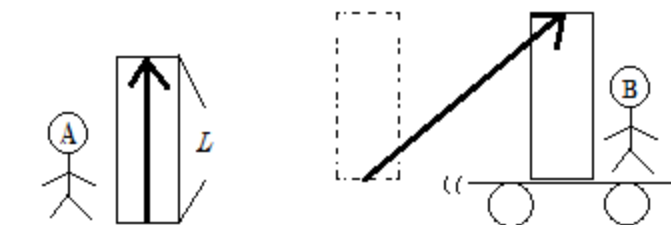


図 1 光線の軌跡

\*4 このあたりの詳しい理論は参考文献の [1] をご覧ください...

\*5 この時の測定値は秒速約 20 万 km. これをもって光速は有限であるという事実も同時に確認された。

光が下底から上底まで達する所要時間  $\tau$  は以下のように表される\*6.

$$\tau = \frac{L}{c} \quad (1)$$

すなわち  $\tau$  とは、静止している人が静止している時計を見るとききの時間である。

□ B と共に等速直線運動している光時計について

A と同じ系から見ると光は図 1 の斜線のような軌跡を描くので、光が下底から上底まで達する所要時間  $t$  は三平方の定理より、

$$L^2 + (vt)^2 = (ct)^2 \quad (2)$$

となる。すなわち  $t$  とは、静止している人が動いている時計を見るとききの時間である

\*7. ここで (1) に注意して (2) を  $t$  について解くと以下のようになる。

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

この式は一体何を意味しているのか、例を用いて簡単に説明する。

仮に今  $L$  が 30 万 km,  $v$  が光速の  $\sqrt{3}/2$  倍の速さであるとすると、

$$t = 2\tau \quad (4)$$

となる。これはつまり、A から見て B の時計が 1 秒を刻むためには A の時計で言うところの 2 秒を要しているということであり、したがって A から見て B は時間の経過の仕方が 2 倍遅れている (ゆっくり時間が進んでいる) ように見える。このように、時間は誰にとっても同じように流れているわけではなく、誰を基準とするかによって相対的に決まるものである。これは後々重要になる。

## 2.3 特殊相対性理論から導かれる重要な事実

前項で見たように、誰を基準とするかによって時間間隔は (3) のように変換される。実はこれは時間だけではなく、質量もまた同様に変換される。つまり、質量  $m_0$  の物体が速度  $v$  で運動する時その質量は、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5)$$

となるのである。(5) を見ると  $v = c$  の時に右辺は無限大に発散してしまうことがわかる。こういったことから、直観的にはあるが「質量のある物体は光速を超えることができない」ということが理解されるだろう\*8。さて、(5) の左辺は  $v$  が  $c$  に比べて十分小さい時は多項式に展開できる。すなわち、

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (6)$$

\*6 一般に固有時間と呼ばれる。

\*7 なお、B の隣に置いてある時計を常に A が見ているわけではない。そうではなくて、B の時計が進行していく方向沿って一直線に無数の時計が並べてあって、その都度その都度地点ごとで B の時計と比較するものとする。この無数に並べた時計は全て A の隣の時計と合わせてあるとする。無数の時計は全て静止しているので時間間隔が狂うことはない。そういう意味で A と B は決して対称的な立場にいるわけではない。

\*8 これは全く厳密な証明にはなっていない。本当はもっとごちゃごちゃした計算が必要。

であり、ここで両辺に  $c^2$  を掛け、左辺を  $E$  とおけば、

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (7)$$

となる。ここで右辺第 2 項目は運動エネルギーの形であるので、(7) の右辺は運動する物体が持つエネルギーの総量を表すことになる。特に  $v = 0$  の時、すなわち物体が静止している時、

$$E = m_0c^2 \quad (8)$$

が成り立つ。したがって質量はエネルギーと等価である\*9。

### 3 一般相対性理論

#### 3.1 時空間の基準となる線素

絶対的であるかと思われていた時間は、実は相対的なものであるということを前章で確認した。誰を基準とするかで 1 秒の間隔が変わってしまうのであった。では誰から見ても不変で絶対的なものはないのだろうか。実はある。それは (微小) 線素と呼ばれていて具体的には以下のような形をしている。

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

(9) を微小線素という。このように決めておけば、重力がない限り常に  $ds$  の値は不変に保たれるのである。したがって (9) は重力のない空間の様子を表す式であると言える。特に光の場合、微小線素は常に 0 となる。これは後で重要になる。ちなみに左辺にある 4 つの項の係数  $(-1, 1, 1, 1)$  を表現する量は計量と呼ばれ  $g_{ij}$  と書かれる\*10。

しかし (9) のような線素の形は重力のない場合にしか成り立たない。重力が存在する時は図 2 のように座標軸そのものが曲がっているため、より一般的な微小線素を考える必要がある。要するに微小線素さえ求めれば空

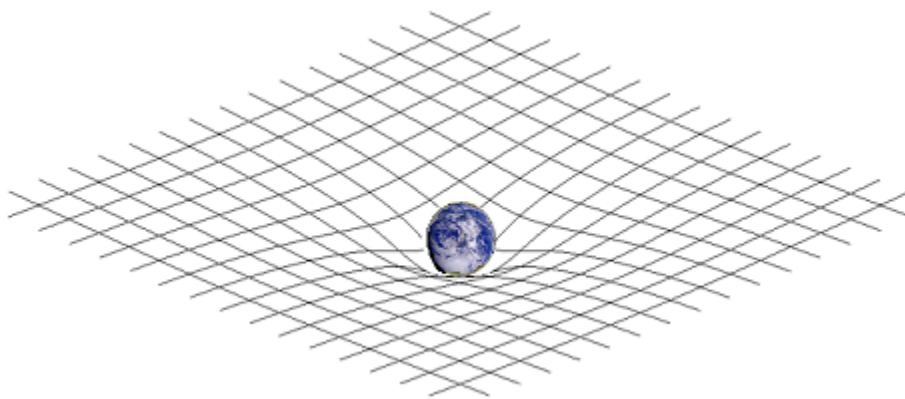


図 2 重力場のイメージ [2]

\*9 地球表面にもたらされるエネルギー量から、太陽中心部での水素→ヘリウムの核融合で毎秒約  $3.8 \times 10^{26}$  J のエネルギーが生み出されていることが分かる。これに (8) を適用すれば毎秒約 400 万トン程の質量が太陽から失われていることになる。

\*10 計量は  $4 \times 4$  の行列形式で表示される。なお第一項目はふつう単位を距離に合わせるために  $cdt$  とまとめられるので係数は-1。

間の様子が記述できるのであって、今後は重力が存在する状況下での微小線素を求めることが目標となる。なお前者を平坦な空間、後者を曲がった空間と呼ぶ<sup>\*11</sup>。

### 3.2 曲がった空間とは

高校で扱ったような普通のベクトルは平行移動しても成分は変わらない。つまりあるベクトル  $A_i(x^j)$  を  $dx^j$  だけ平行移動させたベクトルは以下のように表される。

$$A_{i//}(x^j + dx^j) = A_i(x^j) \quad (10)$$

しかし図のように座標軸そのものが曲がっている場合はそうはいかない。図 3 から分かるように、平行移動した先で元のベクトルを表現するためには、単純に平行移動したベクトルに補正項を足してやらねばならない。これは、

$$A_{i//}(x^j + dx^j) = A_i(x^j) - \Gamma_{ij}^t A_t(x^j) dx^j \quad (11)$$

と表される。ただしここで右辺第 2 項は、

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2} g^{tk} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (12)$$

という形をしている。(11) の右辺第 2 項目がその補正項に当たる<sup>\*12</sup>。この補正項は**接続係数**と呼ばれていて、平坦な空間では  $g_{ij}$  が定数なので 0 になる。実はこの接続係数という考え方をを用いて空間の曲がり具合を表現することができるのである。

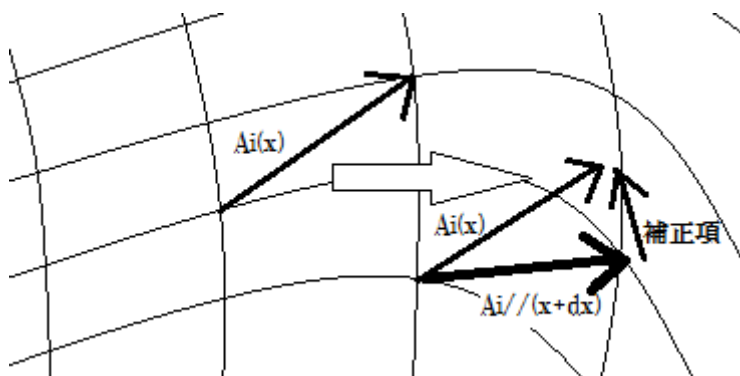


図 3 曲がった時空

<sup>\*11</sup> というよりむしろ一般相対性理論では、質量が空間を曲げていてそれゆえに座標軸が歪み重力が存在する、と考える。重力場の方程式もその考えの下に導かれる。図 2 は、天体という質量の存在によって空間が曲がる様子を、次元を 2 次元に落として表したものの、ゴム膜に球が沈んでいる、というように例えられることが多い。

<sup>\*12</sup>  $dx^j$  には  $dt$  や  $dy$  などが入る。図からも分かるように、観測者の位置が変わるにつれて周囲の空間におけるベクトルの事情も変化する。しかし移動することに空間が変わっていくとしても、観測者周辺のごく狭い領域に限って局所的に平坦な空間を近似的に設定することができる。

例えばワイヤが切れて自由落下するエレベータという狭い空間の中では慣性力によって重力が打ち消され無重力になる。つまり平坦な空間になる。要するに観測者の運動次第で重力があたかも存在しないように考えることもできる。このように考えれば重力というよく分からないものも全て運動学の問題に帰着させることができる。これを**等価原理**という。平成 24 年度京都大学前期入試問題の物理大問 3 など。

曲がった空間の性質を考えてみよう。平坦な空間では起こりえないことだが、曲がった空間ではベクトルをある範囲で一周させたとき、はじめのベクトルと戻ってきたときのベクトルは必ずしも一致しないのである。これはどういうことだろうか。

例えば今、ほぼ赤道直下のシンガポールに真北を向いたベクトルがあるとす。次にこのベクトルを平行移動して地球の裏側のエクアドルに持ってくれば、当然エクアドルでもベクトルは真北を向いている。次にベクトルをそのまま真北に平行移動すれば、北極海を越えて最終的にはシンガポールに戻ってくる。しかし戻ってきたベクトルは真南を指しているの、これは最初と正反対の向きを指していることになる。こういったことは平坦な空間では決して起こりえない。このように空間が曲がっているかどうかはベクトルをある範囲で一周させた時の変化を見て判断することができる。以上のような操作を行うことによって最終的に空間の曲がり具合を表す **Riemann 曲率テンソル** という量を得ることができる。

$$R_{ikj}^t = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^t - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^t + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^t - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^t \quad (13)$$

この量は、強い重力の下でどれほど空間が曲がっているかを表す重要な量である\*13。

### 3.3 Einstein 方程式

図 2 からも分かるように、空間の歪みと質量の存在は何らかの形で関係しているはずである。ではそれらの間にはどのような関係式が成立するだろうか。そもそも Newton の万有引力の考え方では、全ての物質(質量、すなわちエネルギー)は他の全ての物質に重力を及ぼすのであった。また万有引力は遠方でも瞬時に作用するものとしていて、光速も無限大の速さを持つ、という考えの下にある。したがって空間の歪みと質量の間に成立する関係式が満たすべき条件は以下の 4 つであると考えられる。

- 重力場は物質の持つ質量によって生じる
- 重力場は空間の曲がり具合で表される場である
- 物質によって生じた重力は真空中でも消えずに伝わる
- 重力がない、あるいは光速を無限大としたとき Newton 力学に一致する

また 2 章で見たように質量とエネルギーは等価なのであった。さらに Riemann 曲率テンソルの性質を考えることによって最終的に導かれる関係式が Einstein 方程式、

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ij} \quad (14)$$

である\*14[3]。左辺の  $R^{ij}$  と  $R$  はそれぞれ Ricci テンソル、Ricci スカラーと呼ばれ、どちらも前項の Riemann 曲率テンソルから導かれるものである。要するに左辺は空間の曲がり具合を表している。また右辺の  $T^{ij}$  はエネルギー運動量テンソルという量であり、したがって右辺は質量(すなわちエネルギー)の存在具合を表している

\*13 4 つの添字  $tijk$  にはそれぞれ 0~3 までの数字が入る。なぜならそれは空間の成分が時間、 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向というように 4 つ存在するからである。成分は 256 個あるが対称性を考えると独立な成分はそれほど多くない。

\*14 重力場の方程式とも言う。テンソルなので両辺の共変微分が 0 である。単なる微分ではないので注意。また左辺に  $g^{ij}$  に比例する項を加えても (14) は成立する。これがいわゆる宇宙項である。

重力が極めて弱い時は Newton 力学(平坦な空間)と一致するように縛っている。そのため万有引力定数  $G$  が式に登場したりする。また Ricci テンソルは  $4 \times 4$  の対称行列で表すことができるため独立成分は全部で 10 個。

[4].

重力の存在を考慮した条件の下で (14) を上手く解いて計量の成分を計算し微小線素を求めることができれば, 前に提示した目標が達成されたことになる.

## 4 Schwarzschild 解とその解釈

### 4.1 条件を絞って Einstein 方程式を解く

Einstein が一般相対性理論の論文を書き上げてから約 2 ヶ月後の 1916 年 2 月, Schwarzschild は Einstein 方程式の厳密解を発見した. この解の発見こそがブラックホール問題への第一歩であった. (14) のまま方程式を解くのは困難なので, 条件として今, 真空中において重力源となる質量分布が球対称で時間的に変化せず運動もしていないとする. 簡単にいえば静止している球状の天体を仮定するのである. また十分遠い場所ではその天体の影響が無視できて, 微小線素が (9) と一致するものとする. 天体が球対称であるので (9) のようにデカルト座標  $(x, y, z)$  で位置を指定する方法はやめて, 図のように極座標  $(r, \theta, \phi)$  を使う方法を採用する. こうすることによって (9) は,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (15)$$

と書きかえられる. なお当然, (9) と同様に (15) もまだ重力の存在を考えていない. 今, 仮に重力が存在する時の微小線素を,  $r$  の関数  $B(r)$  と  $C(r)$  を用いて,

$$ds^2 = -B(r)c^2 dt^2 + C(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (16)$$

とおけるとする. 今の条件では, 天体から十分遠い場所では重力が無視出来, そのとき (16) は (15) に一致しなければならないので,  $B(r)$  と  $C(r)$  はそれぞれ  $r$  が無限大の極限で 1 に収束しなければいけない. このような条件の下で  $B(r)$  と  $C(r)$  を求めると最終的に微小線素は,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (17)$$

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (18)$$

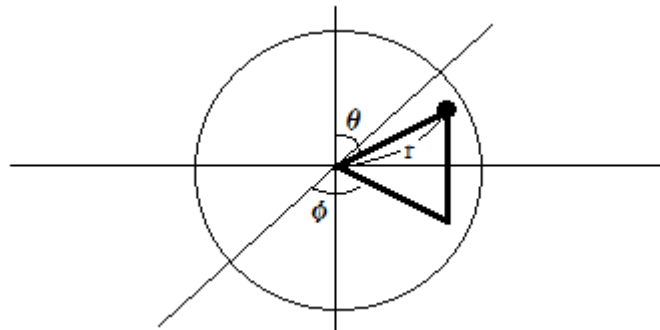


図 4 極座標



と求まる<sup>\*15</sup>. ただしここで  $M$  は天体の質量である. (17) は  $r$  が無限大の時に確かに (15) に一致しているので, しっかり条件を満たしていることがわかる. こうして目標は達成された. この式をよく見ると  $r = 0, a$  で第一項目, または第二項目が無限大に発散することが分かる. こういった点を特異点と呼ぶ<sup>\*16</sup>.

## 4.2 解が持つ意味

解は求まった. しかしこれは一体何を意味しているのだろうか. ブラックホール周辺での時間と距離について順に考察していく.

### ・時間について

2人の観測者 A と B がそれぞれ  $r_A$  および  $r_B$  の位置にいるとする. ただし  $r_A > r_B$  である. 今仮に A も B も運動していないとすると  $dr = d\theta = d\phi = 0$  であり, また微小線素は不変であるので (17) より,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r_A}\right) c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{a}{r_B}\right) c^2 dt^2 \quad (19)$$

となる. ここで A が天体の影響を受けないほど十分遠くにいる時, (18) を  $dt$  について解くと以下のような形にまとめられる.

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{a}{r_B}}} \quad (20)$$

この式は見た感じ (3) と似ていることに気が付く. この関係を用いれば, 例えば B が中心から  $4a/3$  の位置にいる時,

$$dt = 2d\tau \quad (21)$$

となって, A を基準とした時の B の相対的な時間間隔は 2 倍に引き伸ばされていることが分かる. このような時間の引き伸ばしは  $r_B$  が  $a$  に近づくにつれてより顕著になる. 特に B が  $r_B = a$  となる位置にいる時, 時間は無限大倍に引き伸ばされるため, A から見ると B の時間は止まっているように見える<sup>\*17</sup>.

このように  $r_B = a$  の地点では A から見たとき全ての物体が停止しているように見える. この地点を**事象の地平面**といい, そのときの半径  $a$  を **Schwarzschild 半径**と呼ぶ<sup>\*18</sup>. 上のグラフは太陽と同質量の天体がブラックホールになった時の, 天体中心からの距離による時間の引き延ばされ方を表したグラフである<sup>\*19</sup>. 横軸に中心からの距離, 縦軸に時間の倍率をとっている.

### ・動径方向の距離について

今度は動径方向 ( $r$  方向) の光の運動について考えてみる. このとき微小線素は 0 であり  $ds = d\theta = d\phi = 0$  となる. よって (17) より以下のようなになる<sup>\*20</sup>.

$$0 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 \quad (22)$$

<sup>\*15</sup> 計算過程は後ろのページ参照.

<sup>\*16</sup> しかし実際  $r = a$  は特異点ではなく, ブラックホールに落ちていく観測者は  $r = a$  の面を通過したことに気が付かない.

<sup>\*17</sup> A から見ると, B の持つ光時計のレーザー光がいつまでたっても上底に達しないように見える.

<sup>\*18</sup> 事象の地平面を Event Horizon, Schwarzschild 半径を重力半径ということもある.

<sup>\*19</sup> (17) に太陽の質量を代入すると Schwarzschild 半径は約 2954m となる.

<sup>\*20</sup> 時間と距離の間にこのような関係が成立しているということ.  $r$  が無限大, つまり天体から十分離れた重力のない平坦な空間では  $cdt = dr$  となり,  $dt = 1$  の時  $dr = 1$  である. これは要するに光の 1 秒後の到達距離が  $c$  であることを表している.

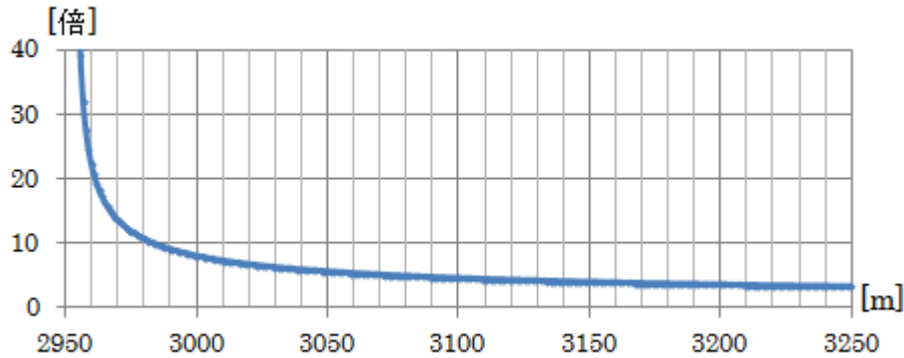


図5 天体中心からの距離による時間の引き延ばされ方

$$dt = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr \quad (23)$$

ブラックホールの近くにいる B から十分遠くにいる A へ光の信号が伝わるのに要する時間  $t_{B \rightarrow A}$  を求めるために、右辺を  $r_B$  から  $r_A$  まで積分すると、

$$\int_{t_B}^{t_A} dt = \frac{1}{c} \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr \quad (24)$$

$$t_{B \rightarrow A} = \frac{1}{c} \left( r_A - r_B + a \ln \left| \frac{r_A - a}{r_B - a} \right| \right) \quad (25)$$

となる<sup>\*21</sup>。ここで  $r_B = a$  のとき  $t_{B \rightarrow A}$  は無限大に発散する。つまり Schwarzschild 半径にいる B が信号を A に伝えるためには、たとえそれが光の速度であっても無限の時間を要してしまう。したがって、一度 Schwarzschild 半径に達してしまうと光でさえも二度と外へ出ることができなくなる<sup>\*22</sup>。

<sup>\*21</sup>  $r$  無限大における平坦な空間では (25) の積分計算は  $ct_{B \rightarrow A} = r_A - r_B$  と随分簡単なものになる。例えば AB 間の距離が  $c$  のとき  $t_{B \rightarrow A} = 1$  であり確かに正しい。

<sup>\*22</sup> しかしブラックホールの内部が想像を絶する空間かという点必ずしもそうではない。例えば球対称に様な質量密度  $\rho$  で満たされている天体の場合を考える。このとき天体の質量  $M$  は  $\rho$  の関数で表されるので、(18) における Schwarzschild 半径  $a$  は、

$$a = \frac{2G}{c^2} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \quad (26)$$

となる。これを  $a$  について解くと以下のようなになる。

$$a = c \sqrt{\frac{3}{8G\pi\rho}} \quad (27)$$

ここで試しに、宇宙の平均質量密度  $\rho = 10^{-26} \text{kg/m}^3$  を代入してみる。なお 3 つの定数はそれぞれ  $c \doteq 3 \times 10^8 \text{m/s}$ ,  $G \doteq 6 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{s}^2\text{kg}$ ,  $\pi \doteq 3$  と大雑把に近似する。

$$\begin{aligned} a &\doteq 3 \times 10^8 \sqrt{\frac{3}{8 \times (6 \times 10^{-11}) \times 3 \times (10^{-26})}} \\ &\doteq 3 \times 10^{26} \sqrt{\frac{10}{48}} \\ &\doteq 3 \times 10^{26} \times \frac{3.2}{7} \\ &\doteq 1.37 \times 10^{26} \text{m} \\ &\doteq 1.37 \times 10^{10} \text{光年} \end{aligned}$$

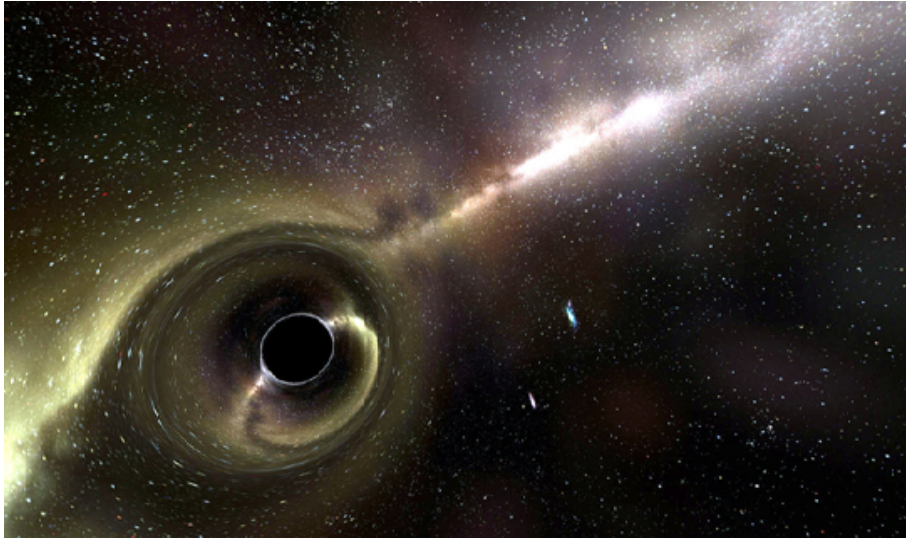


図6 天の川を背景としたブラックホールのシミュレーション [9]

なお、図6は天の川を背景とした時のブラックホールのシミュレーションである。ブラックホール自体は先程考察したように光を逃がさず、またその背後の光は図2で見たような空間の歪みによって歪曲されている様子が分かる。

### 4.3 Newton 力学との一致

地球の引力を振り切って無限の彼方まで飛んでいくために最低限必要な速度を第二宇宙速度という。これは Newton 力学より求められるのであった。例えば今、ある物体を初速度  $v$  で空へ打ち上げ、無限遠で物体の全エネルギーが 0 以上となる時、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \geq 0 \quad (28)$$

が成り立つ。したがって初速度  $v$  が満たすべき条件は、

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (29)$$

であり、実際に数値を代入すると  $v \geq 11.2\text{km/s}$  である。つぎに (29) を  $r$  について解き、 $v$  に速度の最大値である  $c$  を代入すれば、

$$r \geq \frac{2GM}{c^2} \quad (30)$$

---

最後の式変形では 1 光年が約  $10^{16}\text{m}$  であることを利用した。

この計算から、Schwarzschild 半径が約 137 億光年であることが分かる。宇宙の外側の世界にいる人から見れば、この宇宙は Schwarzschild 半径が約 137 億光年のブラックホールになっているのである。一般によく言われている「光速であっても宇宙の外側に出ることができない」ということも、この宇宙自体がブラックホールであると考えれば確かにその通りである。

137 億光年とは要するに光が 137 億年かけて進む距離であるから、仮にビッグバン以降この宇宙が光速で膨張しているとすれば、逆算してビッグバンが起きたのが約 137 億年前、つまり宇宙の年齢が約 137 億年であるということが推測される。これは一般に知られている宇宙の年齢にほぼ等しい。

以上のような考察から(実際この計算自体は別に意味のあるものでもないし、かなり強引ではあるが)、外の世界から見た時この宇宙は大きなブラックホールであり、我々はその内部で快適に過ごしているとも解釈できる [5]。

となる。つまり  $r$  が (30) の関係を満たしていない時、脱出速度は光速を超えるため光でさえも引力を振り切る  
ことができないことになる\*23。

## 5 観測

### 5.1 降着円盤と宇宙ジェット

ブラックホールはその名の通り真っ暗な天体のため目には見えないので、周囲の降着円盤や宇宙ジェットを  
観測することによって間接的に発見される

ブラックホールが天体を吸い込む時、その天体は強い重力のため粉々になり、ブラックホールを中心としてそ  
の周りを円盤状になって回る。これを**降着円盤**と呼び、周回するガスや塵は摩擦によって高温となり X 線を放  
射しながら徐々にエネルギーを失って中心へ落下する\*24。しかし一部のガスや塵は大きなエネルギーを伴って  
降着円盤の垂直方向へ吹き飛ばされることがある。これを**宇宙ジェット**といい、詳しい原理はまだ解明されて  
いない\*25。

### 5.2 観測によって発見されたブラックホール

地球から約 6000 光年の距離にある白鳥座 X-1 はブラックホールの最有力候補の一つであり、1960 年に初め  
て X 線が観測された。図 7 の赤丸辺りに存在すると言われている\*26。連星系を形成していることは既に分かっ  
ているので、伴星が主星を吸い込む際にできる降着円盤から X 線が放射されているのではないかと考えられて  
いる。

図 8 の写真は地球から約 1300 万光年の距離にあるケンタウルス座 A を撮らえたもので、可視光、X 線、マイ  
クロ波のデータを重ね合わせている。この銀河の中心に巨大なブラックホールが存在していると考えられてい  
る。なおこの写真の中で宇宙ジェットは光速の約半分の速さで放出されている。

---

\*23 しかし一旦は外部へ出ることができるので、(18) と形は同じでも意味は全く異なるので注意。

\*24 回転角速度の速い内側の層は回転角速度の遅い少し外側の層と相互作用することによって角運動量を少しずつ失い、さらに内側の  
軌道に移る。角運動量を得た外側のガス層はそれをさらに外側へ伝える。こうしてガスは降着円盤の中を回転しながら次第に中心の  
天体へ向かって落下し、ガスの角運動量は降着円盤の内部から徐々に外側へ運ばれる。ちなみに降着円盤を構成しているガスの主成  
分は電離した水素ガスである。

\*25 電気を帯びた粒子が磁場の影響を受けて加速されているのではないかと、などいくつかの説がある。

\*26 証拠として第一に連星公転運動の重心が主星の中心から離れた所にあること。第二に光度の極大と極小が一周期あたり 2 回ずつに  
なっていること。これは主星がブラックホールに飲み込まれつつあって主星の球形が崩れていることによるものと考えられている  
[6]。

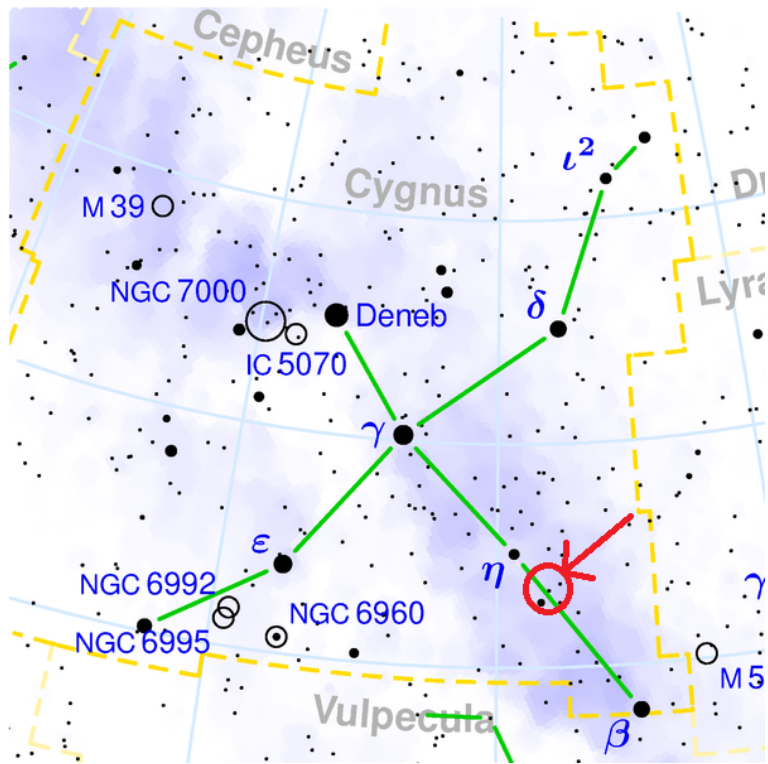


図7 白鳥座 [7]



図8 ケンタウルス座 A[8]

## 6 補足

### 6.1 注釈 15 における計算の大まかな流れ

まず計算のテクニックとして  $B(r) = e^{\nu(r)}$ ,  $C(r) = e^{\lambda(r)}$  とおく. すると計量は,

$$A = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

となる. この計量と (12) を用いてクリストッフェル記号を計算すると, 0 でない成分は,

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu' \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu' \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\lambda' \\ \Gamma^1_{22} &= -re^{-\lambda} \\ \Gamma^1_{33} &= -e^{-\lambda}r \sin^2 \theta \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

となり, これら以外は全て 0 になる. よって 0 でない Ricci テンソルは,

$$\begin{aligned} e^{\lambda-\nu}R_{00} &= \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{\nu'}{r} \\ R_{11} &= -\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(r\nu' - r\lambda' + 2) \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

だけである. また (14) において天体外部には質量が存在しないので, 結局 Ricci テンソルのすべての成分は 0 でなければならない. ここで  $e^{\lambda-\nu}R_{00}$  と  $R_{11}$  の和を取り積分することによって, 適当な定数  $b$  を用いて,

$$\nu + \lambda = b$$

と表すことができる. さらに  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  を連立させる.

$$0 = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(-2r\lambda' + 2)$$

$$(re^{-\lambda})' = 1$$

積分定数を  $a$  として両辺を積分すると最終的に  $B(r)$  と  $C(r)$  が求まる.

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}$$

$$e^\nu = e^b \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

条件より  $B(r)$  と  $C(r)$  はいずれも十分遠くで 1 でなければならないので  $b = 0$  となり, さらにニュートン近似により  $a = 2GM/c^2$  であることが要求される. 以上より (17)(18) が求められる [3].

## 参考文献

- [1] 佐藤文隆 (2009) 『ブラックホール』 ちくま学芸文庫.
- [2] Wikipedia, [http://en.wikipedia.org/wiki/Theory\\_of\\_relativity](http://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_relativity), (2012/05/28 アクセス).
- [3] EMAN の物理学, <http://homepage2.nifty.com/eman/index.html>, (2012/05/28 アクセス).
- [4] 佐藤勝彦 (2009) 『アインシュタインの宇宙』 角川ソフィア文庫.
- [5] 須藤靖 (2010) 『もうひとつの一般相対論入門』 日本評論社.
- [6] 白鳥座 X-1, <http://www2u.biglobe.ne.jp/hagime/spase/bl/cygx-1.html>, (2012/05/28 アクセス).
- [7] Wikipedia, <http://da.wikipedia.org/wiki/Svanen>, (2012/05/28 アクセス).
- [8] Wikipedia, [http://es.wikipedia.org/wiki/Centaurus\\_A](http://es.wikipedia.org/wiki/Centaurus_A), (2012/05/28 アクセス).
- [9] National Geographic Channel, [http://www.ngcjapan.com/tv/lineup/prgmtop/index/prgm\\_cd/103](http://www.ngcjapan.com/tv/lineup/prgmtop/index/prgm_cd/103), (2012/05/28 アクセス).