

## I 概要

### 1, 大まかな歴史

1901年、Einsteinはスイスのベルンにある特許局にやっとの思いで職を見つけ、仕事の傍ら研究を行い1905年に3つの論文を発表した。そのうちのひとつが特殊相対性理論であり、Einsteinは世界から一躍注目を浴びた<sup>1</sup>。

それから約10年後の1916年、今度は特殊相対性理論をより発展させた一般相対性理論という論文を発表した。そして重力場の方程式を初めて解くこと成功したのがSchwarzschildである。論文発表からわずか2か月後のことであった。この解はSchwarzschild解と呼ばれブラックホールの存在を示唆している。

そもそもブラックホールという言葉がはじめて使われたのは、理論的研究と観測によってその存在が確かなものとなりつつあった1969年のことである。それまでは「凍りついた星」や「崩壊星」などと呼ばれていた。前者はまだイメージできなくもないが後者はよくわからない。「崩壊」とは一体何を意味するのだろうか。

### 2, 重力崩壊と Chandrasekhar 質量

星と重力の結びつきは、星を構成している物質が重力で束縛されていることから生ずる。たとえば地球の場合、構成している物質が互いに引き合っているにもかかわらず収縮してしまわないのは、固体の硬さが引力に反抗して平衡を保っているからである。これに対して小惑星など小さな天体は固体の結びつきだけで形を維持しており、微弱な重力は星の形状維持にほとんど何も貢献していない。月の数百倍の質量の天体になって初めて重力が固体の反抗する力を上回り、天体内部の物質が少し押しつぶされたところで平衡に達するのである。

しかし天体内部の物質は無限に圧縮されるわけではない、天体の質量がある値以上になると、天体中心部の核にある物質を構成する原子はあまりの圧力のためにその形を維持できなくなり、中性子物質化する。

陽子と電子が結合して中性子に変わる反応。このほうがエネルギー的に安定する。

微視的な量子論で巨視的な天体の崩壊を説明できるという点で非常に興味深い。

そしてこのときの限界質量を **Chandrasekhar 質量** という。

太陽の約1.44倍。中性子星でいられる質量にも限界があり、これを臨界質量とい

う。太陽の約3倍。白色矮星の限界質量であるところの Chandrasekhar 質量と同様。

また中性子状態とは原子核内の陽子が電子と結合して中性子になってしまった状態である。このとき物質はいわば押せばブスブスと縮むような柔らかい状態になっているため、天体の核部分はほとんどブレーキがかからず自由落下に近い形で縮み始める。これを**重力崩壊**という。

重い恒星の場合、核融合によって中心核には原子核の結合エネルギーが最大である

鉄が残る。そして次に鉄が熱エネルギーを吸収して、ある限界に達すると光分解を起

<sup>1</sup> ちなみに彼が論文発表前に討論した相手は特許局の同僚の Besso だけであった。

こしてヘリウムに分解する。その後中心部は自由落下を始め、超新星爆発を起こす。最後には爆縮されてできた中性子の核が残る。

要するに燃え尽きた後の天体が太陽質量の 1.44 倍以下なら白色矮星、1.44 倍以上 3 倍以下なら中性子星、それ以上なら無限に圧縮されてブラックホール化する。

天体中心部が収縮しコアの高密度化が進むにつれて、核部分は自由落下により運動エネルギーを得る。そのエネルギーの一部は衝撃波となって外へ伝播し、あとから続いて落下してくる外側の層はこの衝撃波と真正面から激突し、大爆発を引き起こす。これを**超新星爆発**といい、このとき天体の外層は吹き飛ばされる。

実際は、陽子と電子の反応の際に中性子と一緒にできたニュートリノがエネルギーの流れとなって外側の層に流れる。ただすり抜けるのではなく、この時に外層の物質と相互作用することによって外層の落下を和らげ、衝撃波と共に吹き飛ばす。

結果、天体中心部に残された高密度の核を中性子星と呼び密度は10 億  $\text{トン}/\text{cm}^3$  程度。重力崩壊が始まり超新星爆発が起きるまで、この間わずか 1 秒程度である。

## II 特殊相対性理論

### 1, 光の速度とエーテル説

1675 年、デンマークの天文学者 **Rømer** は世界で初めて光の速度をオーダーまで正確に測定した。彼は木星の第一衛星イオの木星による食と地球の公転に着目し、当時としては驚異的な精度で光速度を得ることに成功したのであった<sup>2</sup>。

当時、光は波動であると考えられていた。音が空気という媒質の中を波として伝わるように、光もまた**エーテル**という媒質の中を伝わる波であると認識されていた。また風が吹くと音の速さが変わるように、エーテルが空間を流れているならば方向によって光の速さは変化するはずであると考えられていた。

しかし 1887 年、**Michelson-Morley** の実験によって光の速さは進行方向に依存しないことが確認された。結論は、「エーテルは存在せず、光速度は進行方向に依らず常に一定である」であった。後者を光速度不変の原理<sup>3</sup>という。

### 2, 絶対時間は存在しない

1905 年、**Einstein** は特殊相対性理論を発表した。この論文は先程の光速度不変の原理に基づいて展開され、時間は絶対的なものでなく相対的なものであるということが示されている。すなわち、静止している人と等速直線運動している人とは、どちらを基準にするかによって時間の進み方が異なるというのである。

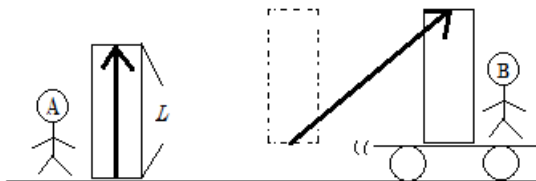
下の図のように、A と B の 2 人の観測者と 2 つの光時計<sup>4</sup>を考える。B は A に対して一定方向に速さ  $v$  で等速直線運動しているとする。以後、光速を  $c$ 、光時計の

<sup>2</sup> この時の測定値は秒速約 20 万 km。これをもって光速は有限であるという事実も同時に確認された。

<sup>3</sup> 光速は秒速約 30 万 km。よく 1 秒で地球を 7 周半すると言われるが、屁理屈を言えばこれは誤り。

<sup>4</sup> 光の伝達によって時間を測る仮想的な時計。下底にレーザー光発射装置が取り付けられている代物。

高さを $L$ とする。図において黒太線はAが観察する光の軌跡である。



(i) Aと共に静止している光時計について

光が下底から上底まで達する所要時間 $t_A$ は当然以下のように表される。

$$t_A = \frac{L}{c} \quad (1)$$

これは「時計が静止している」人から見た時間間隔であって、Bがその隣にある自分の時計を見た時も同様の結果となる。これを $t'_B$ とおくと、 $t_A = t'_B$ 。

(ii) Bと共に等速直線運動している光時計について

~~Aから~~ Aと同じ系から見ると光は斜線のような軌跡を描くので、光が下底から上底まで達する所要時間 $t_B$ は三平方の定理より、

$$L^2 + (vt_B)^2 = (ct_B)^2 \quad (2)$$

となる。

Bの隣に置いてある時計を常にAが見ているわけではない。そう考えてしまうと、時計から発せられた光がAに届くまでの時間云々が絡んできて訳がわからなくなる。

そうではなくて、Bの時計が進行していくx方向沿って一直線に無数の時計が並べられていて、その都度その都度地点ごとでBの時計と比較するものとする。この無数に並べた時計は全てAの隣の時計と合わせてあるとする。無数の時計は全て静止しているので時間間隔が狂うことはない。そういう意味でAとBは決して対称的な立場にいるわけではない。

ここで(1)に注意して、(2)を $t_B$ について解くと以下のようになる。

$$t_B = \frac{t_A}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

この式は一体何を意味しているのか、例を用いて簡単に説明する。

ここで注意すべきことは2つ。 $t_A$ は「時計が静止している」ように見えている観測者が計る時間間隔であるということ。つまり時計と共に運動する観測者が計る時間間隔でもあるのでBがBの時計を見る時も同様。また $t_B$ とは、動いている時計を見た時の時間間隔であるということ。

仮に今、 $L$ が30万km、 $v$ が光速の $\sqrt{3}/2$ 倍の速さであるとすると、(3)より、

$$t_B = 2t_A \quad (4)$$

となる。これはつまり、Aから見てBの時計が1秒を刻むためには、Aの時計で言うところの2秒を要しているということであり、したがってAから見てBは時

間の経過の仕方が2倍遅れている(ゆっくり時が進んでいる)ように見える。

このように時間は、誰にとっても同じように流れているわけではなく、誰を基準とするかによって相対的に決まるものである。この事実は後々重要になる。

### 3, 特殊相対性理論から導かれる重要な事実

前項で見たように、誰を基準とするかによって時間間隔は(3)のように変換されるが、実はこれは時間だけではなく、質量もまた同様に変換される。つまり、質量 $m_0$ の物体が速度 $v$ で運動する時、その質量は、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5)$$

となる。(5)を見ると、 $v = c$  の時に右辺は無限大に発散してしまうことがわかる。こういったことから、直観的にはあるが質量のある物体は光速を超えることができない、ということが理解されるだろう<sup>5</sup>。

さて、(5)の左辺は $v$ が $c$ に比べて十分小さい時は多項式に展開できる。すなわち、

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} \quad (6)$$

であり、ここで両辺に $c^2$ を掛け、左辺を $E$ と書けば、

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (7)$$

となる。ここで右辺第2項目は運動エネルギーの形であるので、(7)の右辺は運動する物体が持つエネルギーの総量を表すことになる。特に  $v = 0$  の時、

$$E = m_0 c^2 \quad (8)$$

が成り立つ。したがって、質量はエネルギーと等価である。

地球表面にもたらされるエネルギー量から、太陽中心部での水素→ヘリウムの核融合で毎秒約 $3.8 \times 10^{26} J$ ものエネルギーが生み出されていることが分かる。これに(8)を適用すれば毎秒約400万トン程の質量が太陽から失われていることになる。

## III 一般相対性理論

### 1, 時空間の基準となる線素とは

絶対的であるかと思われていた時間は、実は相対的なものであるという事実を前章で見た。誰を基準とするかで1秒の間隔が変わってしまうのであった。では誰から見ても不変で絶対的なものはないのだろうか。実はある。それは微小線素と呼ばれていて、具体的には以下のような形をしている。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

(9)の左辺、 $ds$  を線素という。このように決めておけば、たとえ時間間隔が変化し

<sup>5</sup> これは全く厳密な証明ではない。本当はもっとわちゃわちゃした証明が必要。

でも、たとえどんな位置にいようと、 $ds$  の値は不変に保たれるのである。特に光の場合、線素は常に 0 となる。この事実は後で重要になる。ちなみに左辺にある 4 つの項の係数(-1,1,1,1)を表現する量は計量と呼ばれ  $g_{ij}$  と書かれる。

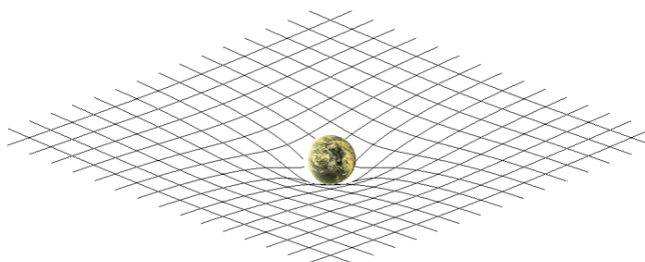
計量は  $4 \times 4$  の行列形式で表示されるが、どちらにしてもここでは全ての成分は定数。なお第一項目は普通  $cdt$  にまとめられるので係数は  $-c^2$  というよりむしろ  $-1$ 。

例えば  $+x$  方向に発射された光の信号は 1 秒後に  $x = c$  へ到達するわけであって、これを(9)へ代入すれば光の運動では  $ds = 0$  となることが分かる。空間が一様なら微小である必要はない。”局所的”に平坦な空間を考える必要はないからである。

しかし(9)のような線素の形は重力のない場合にしか成り立たない。重力が存在する時は座標軸そのものが曲がっているため、より一般的な線素を考える必要がある。要するに線素さえ求めれば空間の様子が記述できるのであって、今後はブラックホールなど無視できないほど強い重力が存在する状況下での線素を求めることが目標となる。なお前者を平坦な空間、後者を曲がった空間と呼ぶ。

というよりむしろ一般相対性理論では、逆に質量が空間を曲げていてそれゆえに座標軸が歪み重力が存在する、と考える。重力場の方程式もその考えの下に導かれる。

下の図は、天体という質量の存在によって空間と座標軸が曲がる様子を、2次元で表したもの。ゴム膜に球が沈んでいる、というように例えられることが多い。

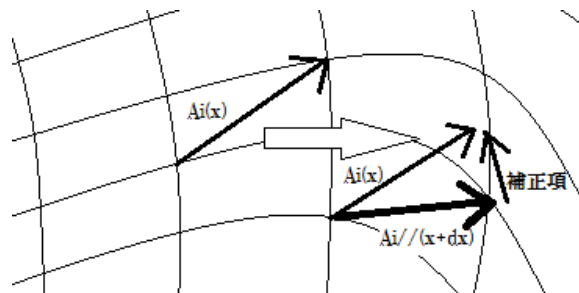


## 2, 曲がった時空とは

高校で扱ったような普通のベクトルは平行移動しても成分は変わらない<sup>6</sup>。つまりあるベクトル  $A_i(x^j)$  を  $dx^j$  だけ平行移動させたベクトルは以下のように表される。

$$A_{i//}(x^j + dx^j) = A_i(x^j) \quad (10)$$

しかし図のように座標軸そのものが曲がっている場合はそうはいかない。



図からも分かるように、平行移動した先で元のベクトルを表現するためには、

<sup>6</sup> 高校数学 B の内容。ちなみに数 C は今年(?)から無くなるらしい。+

ただ単純に平行移動したベクトルに補正項を足してやらねばならない。これは、

$$A_{i//}(x^j + dx^j) = A_i(x^j) - \Gamma_{ij}^t A_t(x^j) dx^j$$

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2} g^{tk} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (11)$$

と表される。(11)の右辺第2項目がその補正項に当たる<sup>7</sup>。この補正項は**接続係数**と呼ばれていて、平坦な空間では $g_{ij}$ が定数なので0になる。

$dx^j$ には $dx$ や $dy$ などが入る。図からも分かるように、観測者の位置が変わるにつれて周囲の空間におけるベクトルの事情も変化する。 $dx$ 移動するごとに空間が変わっていくとすれば、その狭い領域に限って局所的に平坦な空間を設定することができる。

例えばワイヤが切れて自由落下するエレベータという狭い空間の中では慣性力によって重力が打ち消され無重力になる。つまり平坦な空間になる。要するに観測者の運動次第で重力があたかも存在しないように考えることもできる。このように考えれば重力というよく分からないものも全て運動学の問題に帰着させることができる。これを等価原理という。平成24年度京都大学前期入試問題の物理大問Ⅲなど。

実はこの接続係数を用いて空間の曲がり具合を表現することができる。(11)の式で表されているように、ベクトルは少しの距離を平行移動させる度に第2項目による補正を受ける。仮にベクトルをある範囲で一周させるとすると、はじめのベクトルと戻ってきた時のベクトルは必ずしも一致しないのである。これはどういうことか。

例えば今、ほぼ赤道直下のシンガポールに真北を向いたベクトルがあるとすると。次にこのベクトルを平行移動して地球の裏側のエクアドルに持ってくれば、当然エクアドルでもベクトルは真北を向いている。次にベクトルをそのまま真北に平行移動すれば、北極海を越えて最終的にはシンガポールに戻ってくる。しかし戻ってきたベクトルは真南を指しているの、これは最初と正反対の向きを指していることになる。こういったことは平坦な空間では決して起こりえない。このように空間が曲がっているかどうかはベクトルをある範囲で一周させた時の変化を見て判断することができる。以上のような操作を行うことによって、最終的に空間の曲がり具合を表す**Riemann 曲率テンソル**という量を得ることができる。

$$R_{ikj}^t = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^t - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^t + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^t - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^t \quad (12)$$

この量は強い重力の下でいかに空間が曲がっているかを表す重要な量である<sup>8</sup>。

4つの添字 $tikj$ にはそれぞれ0~3までの数字が入る。なぜならばそれは空間の成分が時間、 $x$ 方向、 $y$ 方向、 $z$ 方向というように4つ存在するから。成分は256個あるが対称性を考えると独立な成分はそんなに多くない。

<sup>7</sup> ちなみに $\Gamma_{ij}^k$ にはChristoffel記号というカッコイイ名前が付いている。

<sup>8</sup> このあたりの計算は書くのがしんどいので割愛。気になる人は後で聞きに来てください。



### 3, 重力場の方程式

質量すなわちエネルギーが周囲の空間を曲げることによって重力が存在する、と考えると、エネルギーの存在具合と空間の曲がり具合は等号で結ばれなくては行けない。このような考え方の下に導かれる最終的な結果が**重力場の方程式**<sup>9</sup>、

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ij} \quad (13)$$

である<sup>10</sup>。左辺の $R^{ij}$ と $R$ はそれぞれ Ricci テンソル、Ricci スカラーと呼ばれ、どちらも前項目の Riemann 曲率テンソルから導かれるものである。要するに左辺は空間の曲がり具合を表している。また右辺の $T^{ij}$ はエネルギー運動量テンソルという量であり、したがって右辺はエネルギーの存在具合を表している。

重力が極めて弱い時は Newton 力学（平坦な空間）と一致するように縛っている。そのため万有引力定数 $G$ が式に登場したりする。また Ricci テンソルは  $4 \times 4$  の対称行列で表すことができるため、独立成分は全部で 10 個。

ある条件の下で(13)を上手く解いて $g^{ij}$ の成分を計算し、線素を求めることができれば、前に提示した目標が達成されたことになる。

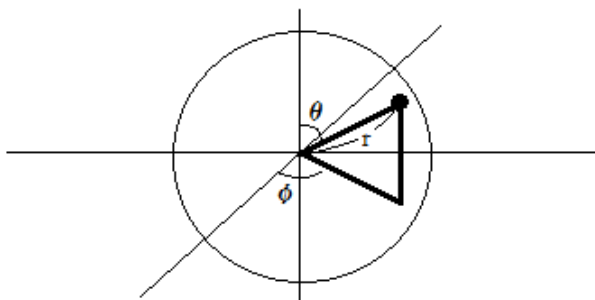
## IV Schwarzschild 解とその解釈

### 1, 条件を絞って重力場の方程式を解く

Einstein が一般相対性理論の論文を書き上げた 2 ヶ月後の 1916 年 2 月に、Schwarzschild は重力場の方程式の厳密解を発見した。この解の発見こそがブラックホール問題への第一歩であった。

(13)のまま方程式を解くのは難解すぎるので、条件として今、真空中において重力源となる質量分布が球対称で時間的に変化せず運動もしていないとする。簡単にいえば静止している球状の天体を仮定するのである。また十分遠い場所ではその天体の影響が無視できて、線素が(9)と一致するものとする。

天体が球対称であるので、(9)のように $(x, y, z)$ で位置を指定する方法はやめて、図のように $(r, \theta, \phi)$ を使う方法を採用する。こうすることによって(9)は、



<sup>9</sup> Einstein 方程式とも言う。テンソルなので両辺の共変微分が 0 である。単なる微分ではないので注意。

<sup>10</sup> 実は左辺に、 $g^{ij}$ に比例する項を加えても(13)は成立する。これがいわゆる宇宙項である。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (14)$$

と書きかえられる。(9)と(14)はある一点の指定の仕方が変わっただけで全く同じことを表している。日本語を英語に書き換えたようなもので、結局意味は同じ。よって(9)と同様に(14)も重力の存在を考えていない。今仮に、重力が存在する時の線素を、 $B(r)$ と  $C(r)$ を用いて、

$$ds^2 = -B(r)c^2 dt^2 + C(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (15)$$

とおいてみる。

どんな置き方をしたところで、重力場の方程式を満たし、天体から十分離れたところで平坦な空間の微小線素に一致していれば何も問題はない。

今の条件として天体から十分遠い場所で(15)は(14)に一致しなければならないので、 $B(r)$ と  $C(r)$ はそれぞれ  $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r), C(r) = 1$  を満たすとする。

このような条件の下で  $B(r)$ と  $C(r)$ を求める<sup>11</sup>と最終的に線素は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (16)$$

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

と求まる。(16)は $r$ が無限大の時に(15)に一致しているのでしっかり条件を満たしている。こうして目標は達成された。この式をよく見ると  $r = 0, a$  で第一項目および第二項目が無限大に発散することが分かる。こういった点を特異点と呼ぶ。

しかし実際、 $r = a$ に特異性はなく、ブラックホールに落ちていく観測者からすると  $r = a$ を通過したことに気が付かない。

## 2, 解が持つ意味

解は求まった。しかしこれは一体何を意味しているのだろうか。ブラックホール周辺での時間と距離について順に考察していく。

### (i) 時間について

2人の観測者 A と B がそれぞれ  $r_A$  および  $r_B$  の位置にいるとする。ただし、 $r_A > r_B$  である。今仮に A も B も運動していないとすると、 $dr = d\theta = d\varphi = 0$  であり、また線素は不変であるので、(16)より、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r_A}\right)c^2 dt_A^2 = -\left(1 - \frac{a}{r_B}\right)c^2 dt_B^2 \quad (17)$$

となる。ここで A が天体の影響を受けないほど十分遠くにいる時、(17)を  $dt_B$  について解くと以下のような形にまとめられる。

$$dt_B = \frac{dt_A}{\sqrt{1 - \frac{a}{r_B}}} \quad (18)$$

<sup>11</sup> 計算過程は後ろのページ参照。ここに書くとどうしても繁雑になるので…。



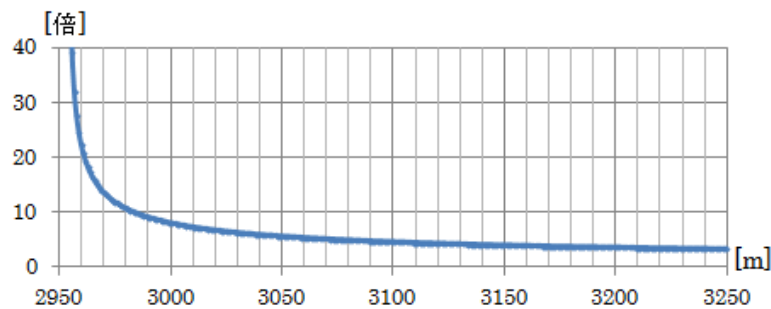
見た感じ、これは(3)と似ていることに気が付く。

この関係を用いれば、例えば B が中心から  $2a$  の位置にいる時、

$$dt_B = \sqrt{2} dt_A \quad (19)$$

となって、A を基準とした時の B の相対的な時間間隔は  $\sqrt{2}$  倍に引き伸ばされていることが分かる。このような時間の引き伸ばしは、 $r_B$  が  $a$  に近づくにつれてより顕著になる。特に B が  $r_B = a$  となる位置にいる時、時間は無限大倍に引き伸ばされるため、A から見ると B の時間は止まっているように見える<sup>12</sup>。

このように  $r_B = a$  の地点では全ての物体が停止しているように見える<sup>13</sup>。この地点を **事象の地平面<sup>14</sup>** といい、そのときの半径  $a$  を **Schwarzschild 半径** と呼ぶ。下のグラフは太陽と同質量の天体がブラックホールになった時のシミュレーション<sup>15</sup>。横軸に中心からの距離、縦軸に倍率をとっている。



ただ太陽がブラックホール化することはないので、この例は少し不適切だったかも。

## (ii) 距離について

今度は動径方向 ( $r$  方向) の光の運動について考えてみる。このとき線素は 0 であり  $ds = d\theta = d\varphi = 0$  となる。よって(16)より以下ようになる。

$$0 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 \quad (20)$$

$$dt = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr$$

時間と距離の間にこのような関係が成立しているということ。 $r$  が無限大、つまり平坦な空間では  $cdt = dr$  となり、 $dt = 1$  の時  $dr = c$  である。これは要するに光の 1 秒後の到達距離が  $c[m]$  であることを表している。

天体中心からの距離  $r$  が変わるにつれてこの関係式も変化していくので、その都度その都度各空間での所要時間を測って足し合わせる必要がある。

ブラックホールの近くにいる B から遠く<sup>16</sup>にいる A へ光の信号が伝わるのに

<sup>12</sup> A から見ると、B の持つ光時計のレーザー光がいつまでたっても上底に達しないように見える。

<sup>13</sup> 実際は光の波長が引き伸ばされてしまって何も見えない。これは「もし見ることができたら」の話。

<sup>14</sup> event horizon とも言う。

<sup>15</sup> (23) に太陽の質量を代入すると Schwarzschild 半径は約 2954m となる。夙川-西宮北口くらい。

<sup>16</sup> 無限遠ではない。 $r_A$  が無限大だと当然  $t_{B \rightarrow A}$  も無限大になる。

要する時間 $t_{B \rightarrow A}$ を求めるために、両辺を $r_B$ から $r_A$ まで積分すると、

$$\int_{r_B}^{r_A} dt = \frac{1}{c} \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr$$

$$t_{B \rightarrow A} = \frac{1}{c} \left( r_A - r_B + a \ln \left| \frac{r_A - a}{r_B - a} \right| \right) \quad (21)$$

である。

$r \rightarrow \infty$ の平坦な空間では(20)の積分計算は随分簡単なものになり $ct_{B \rightarrow A} = r_A - r_B$ で

ある。例えば AB 間の距離が $c[m]$ のとき $t_{B \rightarrow A} = 1[sec]$ であり確かに正しい。

ここで $r_B = a$ のとき $t_{B \rightarrow A}$ は無限大に発散する。つまり Schwarzschild 半径にいる B が信号を送り A に伝えるためには、たとえそれが光の速度であっても無限の時間を要してしまう。よって一度 Schwarzschild 半径に達してしまうと、光でさえも二度と外へ出ることができなくなる。

しかしブラックホールの内部が想像を絶する空間かという必ずしもそうではない。例えば球対称に一様な質量密度 $\rho$ で満たされている天体の場合を考える。このとき天体の質量 $M$ は $\rho$ の関数で表されるので、(16)における Schwarzschild 半径 $a$ は、

$$a = \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \rho$$

となる。これを $a$ について解く。

$$a = c \sqrt{\frac{3}{8G\pi\rho}}$$

ここで試しに、 $\rho$ に宇宙の平均質量密度 $10^{-26} kg/m^3$ を代入してみる。なお3つの定数はそれぞれ $c \doteq 3 \times 10^8 m/sec$ 、 $G \doteq 6 \times 10^{-11} m^3/sec^2 kg$ 、 $\pi \doteq 3$ と大雑把に近似する。

$$\begin{aligned} a &\doteq 3 \times 10^8 \sqrt{\frac{3}{8 \times (6 \times 10^{-11}) \times 3 \times 10^{-26}}} \\ &\doteq 3 \times 10^{26} \sqrt{\frac{10}{48}} \\ &\doteq 3 \times 10^{26} \times \frac{3.2}{7} \\ &\doteq 1.37 \times 10^{26} m \\ &\doteq 1.37 \times 10^{10} \text{光年} \end{aligned}$$

最後の式変形では1光年が約 $10^{16} m$ であることを利用した。

この計算から、Schwarzschild 半径が約137億光年であることが分かる。宇宙の外側の世界にいる人から見れば、この宇宙は Schwarzschild 半径が約137億光年のブラックホールになっているのである。一般によく言われている「光速であっても宇宙の外側に出ることができない」ということも、この宇宙自体がブラックホールであると考えれば確かにその通りである。

137億光年とは要するに、光が137億年かけて進む距離であるから、仮にビッグバン以降この宇宙が光速で膨張しているとすれば、逆算してビッグバンが起きたのが約137億年前、つまり宇宙の年齢が約137億年であるということが推測される。これは一般に知られている宇宙の年齢にほぼ等しい。

以上のような考察から(かなり強引だが)、外の世界から見た時この宇宙は大きなブラックホールであり、我々はその内部で快適に過ごしているとも解釈できる。

### 3, Newton 力学との一致

地球の引力を振り切って遥か彼方まで飛んでいくために最低限必要な初速度を第二宇宙速度という。これは Newton 力学より求められるのであった。例えば今、ある物体を初速度  $v$  で空へ打ち上げ、遥か彼方で物体の全エネルギーが 0 になる時、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \quad (22)$$

が成り立つ。したがって  $v$  が満たすべき条件は、

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (23)$$

であり、実際に数値を代入すると  $v \geq 11.2 \text{ km/sec}$  である。つぎに(23)を  $r$  について解き、 $v$  に速度の最大値である  $c$  を代入すれば、

$$r \geq \frac{2GM}{c^2} \quad (24)$$

となる。つまり  $r$  と  $M$  が(24)の関係を満たしていない時、脱出速度は光速を超えるため光でさえも引力を振り切ることができないことになる<sup>17</sup>。

## V 観測

### 1, 降着円盤と宇宙ジェット

ブラックホールはその名の通り真っ暗な天体のため目には見えないので、周囲の降着円盤や宇宙ジェットを観測することによって間接的に発見される。

ブラックホールが天体を吸い込む時、その天体は強い重力のため粉々になり、ブラックホールを中心としてその周りを円盤状になって回る。これを降着円盤と呼び、周回するガスや塵は摩擦によって高温となり X 線を放射しながら徐々にエネルギーを失って中心へ落下する。しかし一部のガスや塵は大きなエネルギーを伴って降着円盤の垂直方向へ吹き飛ばされることがある。これを宇宙ジェットといい、詳細な原理は未だに解明されていない<sup>18</sup>。

<sup>17</sup> しかし一旦は外部へ出ることができるので、(16)と形は同じでも意味は全く異なるので注意。

<sup>18</sup> 電気を帯びた粒子が磁場の影響を受けて加速されているのではないか、などいくつかの説がある。

回転角速度の速い内側の層は、回転角速度の遅い少し外側の層と相互作用することによって角運動量を少し失い、さらに内側の軌道に移る。角運動量を得た外側のガス層はそれをさらに外側へ伝える。こうしてガスは降着円盤の中を回転しながら次第に中心の天体へ向かって落下し、ガスの角運動量は降着円盤の内部から徐々に外側へ伝達されていく。ちなみに降着円盤を構成しているガスの主成分は電離した水素ガス。

## 2, 観測によって発見されたブラックホール

地球から約 6000 光年の距離にある**はくちょう座 X-1<sup>19</sup>**はブラックホールの最有力候補の一つであり、1960 年に初めて X 線が観測された。右図の赤丸辺りに存在する。連星系を形成していることは既に分かっているので、伴星が主星を吸い込む際にできる降着円盤から X 線が放射されているのではないかと考えられている。



証拠として第一に、連星公転運動の重心が青色超巨星の中心から離れた所にあること。第二に、極大と極小が 2 回ずつになっていること。これは主星がブラックホールに飲み込まれつつあって球形が崩れていることによる。勉強会の際に図で簡単に説明。

下の写真は地球から約 1300 万光年の距離にあるケンタウルス座 A を撮らえたもので、可視光、X 線、マイクロ波のデータを重ね合わせている。この銀河の中心に巨大なブラックホールが存在していると考えられている。なおこの写真の中で宇宙ジェットは光速の約半分の速さで放出されているものと考えられている。



<sup>19</sup> 太陽質量の 20 倍程度のブラックホールで、自転はしていないと考えられている。

+  $\alpha$  補足

## 注釈 11 における計算の大まかな流れ

まず計算のテクニックとして  $B(r) = e^{\nu(r)}$ 、 $C(r) = e^{\lambda(r)}$  とおく。すると計量は、

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{a})$$

となる。(a)と(11)を用いて Christoffel 記号を計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} \nu' & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda' & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} \\ \Gamma_{33}^1 &= -e^{-\lambda} r \sin^2 \theta & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

となり、これら以外は全て 0 になる。よって 0 でない Ricci テンソルは、

$$\begin{aligned} e^{\lambda-\nu} R_{00} &= \frac{1}{2} \nu'' - \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{\nu'}{r} \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu' \lambda' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} (r \nu' - r \lambda' + 2) \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{c})$$

だけである。また(13)において天体外部には質量が存在しないので、結局 Ricci テンソルのすべての成分は 0 でなければならない。ここで(c)の第一式と第二式の和を考えることにより、適当な定数  $b$  を用いて、

$$\nu + \lambda = b \quad (\text{d})$$

と表すことができ、さらに第一、二、三式を連立させる。

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda} (-2r \lambda' + 2) \\ (r e^{-\lambda})' &= 1 \end{aligned} \quad (\text{e})$$

積分定数を  $a$  として両辺を積分すると最終的に  $B(r)$  と  $C(r)$  が求まる。

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}, \quad e^{\nu} = e^b \left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad (\text{e})$$

条件より  $B(r)$  と  $C(r)$  はいずれも十分遠くで 1 であるので、 $b = 0$  であることが要求され、またニュートン近似により定数  $a$  が決定する。以上より(16)が求められる。

## 参考にした文献とホームページ一覧

- ・ 佐藤文隆著, ブラックホール, ちくま学芸文庫
- ・ 佐藤勝彦著, アインシュタインの宇宙, 角川ソフィア文庫
- ・ 須藤靖著, もうひとつの一般相対論入門, 日本評論社
- ・ EMAN の物理学, <http://homepage2.nifty.com/eman/index.html>
- ・ 白鳥座 X-1(CygX-1), <http://www2u.biglobe.ne.jp/~hagime/spase/bl/cygx-1.html>  
画像について
  - ・ P5 上図 → [http://en.wikipedia.org/wiki/Theory\\_of\\_relativity](http://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_relativity)
  - ・ P12 上図 → <http://ja.wikipedia.org/wiki/はくちょう座>, 一部加工
  - ・ P12 下図 → [http://es.wikipedia.org/wiki/Centaurus\\_A](http://es.wikipedia.org/wiki/Centaurus_A)

このプリントは解説版であって勉強会で皆に配ったものではありません。全頁の赤字は解説の際に自分が説明しやすいように付け加えたメモのようなものなので、文章が分かりにくい部分が多々あるかと思います。特に **I 概要** の赤字についてはソースが若干怪しいので、仮に誤りがある可能性は他の章に比べてやや高めです。

勉強会で配ったプリントに一部ミスがあったので訂正しました。 **II 特殊相対性理論** の文章の一部、あと(18)以降の式番号および(11)と(21)の式のことです。失礼しました。

P12 の計算はかなり省略しています。これに取り組む人は、ネットではなくちゃんとした文献を参考にして計算してください。ちなみに私は Ricci テンソルの 00 と 11 成分だけは確かめましたが、計算量が半端ではないため、残り 8 個の成分計算は断念しました。

何か質問があれば富までお願いします。私が見る範囲でお答えします。~~なんでもは知らないわよ、知ってることだけ。~~あとどこかにミスを発見した方も私までお知らせください。

神戸大学天文研究会 2012 年度宇宙科学班班長 富